האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ח – מועד א' לתלמידי תלפיות

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. תהי L שפה לתחשיב הפסוקים בה יש אינסוף פסוקים יסודיים.
א. הוכח כי לכל פסוק שאינו סתירה יש אינסוף מודלים.
ב. הגדרה: פסוק ϕ נקרא **פסוק בעל מידע מירבי** אם ϕ אינו סתירה, ולכל פסוק ψ המקיים $\phi \models \psi$ מתקיים ש-ψ הוא סתירה או ש- $\phi \equiv \psi$.
האם קיים ב-L פסוק בעל מידע מירבי?
ג. מהי ההגדרה הדואלית להגדרה ב-ב', ומהו הדואלי למה שהוכחת ב-ב'?
ד. מהי התשובה ל-ב' כאשר יש ב-L רק מספר סופי של פסוקים יסודיים? הוכח!

2. א. תהי T קבוצת כל הפסוקים האמיתיים במבנה N^+ של המספרים הטבעיים עם החיבור והכפל. בהנחה ש-T אינה כריעה הוכח ש-T אינה כריעה חיובית.
ב. הוכח את המשפט העיקרי עליו הנך מסתמך ב-א'.

3. בשפה של תורת המספרים נסח נוסחה $\phi(\mathsf{x})$ האומרת ש-x הוא חזקה חיובית של מספר ראשוני, כלומר שקיים השיוויון
$\{a \in N | \mathrm{val}(N^+, \binom{\mathsf{x}}{a}, \phi(\mathsf{x})) = \mathsf{T}\} = \{p^n | n \geq 1$ ו- p ראשוני$\}$.

4. א. בתחשיב מסדר ראשון ללא שיוויון, עם קבועים שאתה תבחר, כתוב פסוק שכל מודל שלו הוא אינסופי.
ב. אם $\neg(\phi \rightarrow \psi)$ טאוטולוגיה, מה זה אומר על הפסוקים ϕ ו-ψ?
ג. אם $\phi \rightarrow \psi$ טאוטולוגיה, מה זה אומר על הפסוקים ϕ ו-ψ?

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ח – מועד א'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר — הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. א. תהי L שפה לתחשיב הפסוקים בה יש n פסוקים יסודיים. מהו האורך המירבי של סדרות הפסוקים $\psi_1,\ldots,\psi_k$ כך ש- $\psi_1 \models \psi_2,\ \psi_2 \models \psi_3,\ \ldots\ \psi_{k-1} \models \psi_k$, ו-ψ_i אינו שקול ל-ψ_{i+1} עבור $1 \le i < n$?

2. א. הגדר את מושג הקבוצה המושתתת של פסוקים בשפה M של תחשיב היחסים מסדר ראשון.
ב. תהי Ω קבוצה מושתתת של פסוקים בשפה M, איזה תנאי תחבירי נוסף על Ω לקיים כדי שיהיה לה מודל?
ג. הוכח בפרוטרוט שאם Ω קבוצה מושתתת המקיימת גם את התנאי של ב' אז יש לה מודל.

3. יהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים לשפה L של תחשיב היחסים ללא שיוויון.
א. הגדר מתי פונקציה h היא הומומורפיזם של $\mathcal{A}$ על $\mathcal{B}$.
ב. הוכח שהיחס E על A הנתון ע"י $a\,E\,b \ \Leftrightarrow\ h(a)=h(b)$ הוא יחס חפיפה על $\mathcal{A}$.
ג. הוכח שלכל יחס חפיפה E על $\mathcal{A}$ קיים מבנה $\mathcal{B}$ והומומורפיזם h של $\mathcal{A}$ על $\mathcal{B}$ כך שלכל $a,b \in A$ קיים $a\,E\,b \ \Leftrightarrow\ h(a)=h(b)$. אם אתה בוחר במבנה $\mathcal{B}$ תיקני כזה אינך צריך להוכיח את קיומו אלא רק לצטט באופן מלא ומדוייק את הגדרתו.

4. א. נתונים שני הפסוקים $\exists \mathsf{x}(\phi(\mathsf{x}) \to \psi)$ ו- $\forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \psi$ היכן ש-x אינו חופשי ב-ψ. עבור כל אחד מהם ענה על השאלה אם הוא גורר לוגית את חברו.
ב. האם קיימת הגרירה הבאה? $\exists \mathsf{x}(\mathsf{P}(\mathsf{x}) \to \mathsf{Q}(\mathsf{x}))\ ,\ \exists \mathsf{x}\mathsf{P}(\mathsf{x}) \ \models\ \exists \mathsf{x}\mathsf{Q}(\mathsf{x})$

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תשנ"ח – מועד ב'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח.

1. א. יהי nand הקשר הפסוקי שלוח האמת שלו נותן את הערך F לזוג הארגומנטים (T,T), ואת הערך T לכל זוג אחר של ערכי אמת. הוכח שקבוצת הקשרים $\{\text{nand}\}$, שקשר זה הוא איברה היחיד, היא קבוצת קשרים שלמה.
ב. האם קבוצת הקשרים $\{\rightarrow\}$ שלמה? הוכח!

2. הגדר מתי שם עצם t כשר להצבה עבור משתנה x בנוסחה ϕ.
ב. הוכח שאם t כשר להצבה עבור x בנוסחה ϕ אז הנוסחה $\forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \phi(t)$ אמיתית לוגית, היכן ש-$\phi(\mathsf{x})$ היא ϕ, ו- $\phi(t)$ היא הנוסחה המתקבלת מ-$\phi(\mathsf{x})$ ע"י הצבת t להופעות החופשיות של x.
אין צורך להוכיח כאן את המשפט הכללי עליו אתה מסתמך, אלא רק לצטט אותו באופן מלא.
ג. הבא דוגמאות של נוסחאות ϕ ו-ψ בהן t אינו כשר להצבה עבור x ב-ϕ וב-ψ, הנוסחה $\forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \phi(t)$ אמיתית לוגית, והנוסחה $\forall\mathsf{x}\psi(\mathsf{x}) \rightarrow \psi(t)$ אינה אמיתית לוגית.

3. א. הגדר את מושג האיזומורפיזם של מבנים לאותה שפה.
ב. נסח את המשפט המקשר את ערכי האמת של נוסחה ϕ בשני מבנים איזומורפיים.
ג. הוכח את משפט האיזומורפיזם לשמות עצם.
ד. הוכח את משפט האיזומורפיזם לנוסחאות מסדר ראשון.

4. א. א. רשום את אקסיומות פיאנו לתורת המספרים הטבעיים עם קבוע 0 ופעולת העוקב בלבד.
ב. הגדר מה זאת קבוצת אקסיומות קטגורית.
ג. הוכח את קטגוריות אקסיומות פיאנו.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ח – מועד ג'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' אליהו שמיר   הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית.

1. א. תהיינה Γ, Δ קבוצות פסוקים בתחשיב הפסוקים. הוכח כי $\Gamma \equiv \Delta$ אסם לכל פסוק ϕ קיים $\Delta \models \phi$ אסם $\Gamma \models \phi$.
ב. תהי L שפה סופית של תחשיב הפסוקים ו-Σ קבוצת פסוקים אינסופית ב-L. הוכח שקיימת קבוצת פסוקים סופית Σ^* ב-L השקולה ל- Σ.

2. תהי Γ קבוצת פסוקים כריעה בתחשיב הפסוקים. הוכח שקבוצת כל המסקנות שלה, כלומר הקבוצה $\{\phi | \Gamma \models \phi\}$, היא כריעה חיובית.

3. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים.

4. א. כתוב בשפה מסדר שני ללא קבועים, פרט לשיוויון, פסוק שהמודלים הסופיים שלו הם בדיוק אלו בעלי מספר איברים זוגי.
ב. לכל אחד מן הפסוקים הבאים, אם הפסוק אמיתי או שיקרי לוגית הסבר מדוע, אחרת הבא שני מבנים אחד בו הפסוק אמיתי והשני בו הפסוק שיקרי.
$\forall x \exists y \forall z (R(x,y) \land \neg R(y,z))$, $\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$.

בהצלחה!